



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»
Первый семестр**

Предназначено для студентов первого курса заочной формы обучения
(полного курса) по направлению подготовки
38.05.02

г. Ростов-на-Дону

2025

В пособии приведены варианты заданий контрольной работы №1 для студентов заочной формы обучения (полный курс) по темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Высшая математика» в первом семестре, сформулированы методические рекомендации по их выполнению. Рассмотрены также образцы решения всех заданий и краткие теоретические сведения, используемые в этих решениях.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1	5
ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1	7
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ.....	17
ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ	53
СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ	54
ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКИ	54

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Уважаемые студенты!

Для качественного освоения учебного материала дисциплины «Высшая математика» и успешного выполнения заданий контрольной работы №1 Вам необходимо, прежде всего, изучить теоретический материал, затем рассмотреть и проанализировать примеры решения практических задач. В этом Вам помогут указанные в нашем пособии информационные источники, а также приведенный в пособии очень краткий конспект лекций.

После этого вы можете приступить к выполнению заданий своего варианта.

Будьте внимательны к определению номера вашего варианта. Правило его выбора достаточно простое, оно сформулировано перед заданиями контрольной работы.

При самостоятельном решении и оформлении заданий вашего варианта Вам будет полезно использовать рассмотренный в пособии образец выполнения и оформления всех заданий контрольной работы. Выполнять задания целесообразно поэтапно, по темам.

В пособии также приведены вопросы для подготовки к экзамену. Их изучение рекомендуется начинать при выполнении контрольной работы.

Варианты заданий контрольной работы №1

Вариант № n

Правило выбора номера варианта контрольной работы: номером варианта служит число n, равное сумме двух последних цифр зачетной книжки студента, если это не ноль. Если же две последние цифры номера зачетной книжки студента нули, то следует полагать n=19. Во всех заданиях своего варианта вместо n необходимо подставить номер Вашего варианта.

Требования к оформлению. Контрольная работа должна иметь титульный лист согласно требованиям ДГТУ к письменным работам обучающихся. Работу нужно выполнять от руки в тонких тетрадях, записывая условие задания и подробное решение. Также необходимо записывать формулы, теоретические положения, используемые в ходе решения заданий.

1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия, векторная алгебра

Задание 1.1

Найти: 1) $3A - 4B$ и 2) произведение $A \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & n+5 & 2 \\ n-10 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} n & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -n \end{pmatrix}$$

Задание 1.2

Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = n+1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 5-n \\ x_1 + x_2 - n \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

методом Крамера и методом Гаусса.

Задание 1.3

Найти косинус угла между векторами \overline{AB} и \overline{AC}
 $A(5, n, 3)$, $B(0, -1, n-4)$, $C(1, -6, 5)$.

Задание 1.4

Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(9, n-5, n)$, $B(3, 5, n)$ и $C(10, -3, 7)$.

Задание №1.5

Найти смешанное произведение векторов $\bar{a} = \{1; 2; n-20\}$, $\bar{b} = \{0; 1; 4\}$, $\bar{c} = \{2; 2; 0\}$.

Задание 1.6

Получить уравнение прямой, проходящей:

- а) через точки $M_1(1, 2, n)$ и $M_2(n, 3, 7)$;
- б) через точку $M_3(n+1, 2, -5)$ параллельно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Задание 1.7

Получить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; n; 1)$ перпендикулярно вектору \overline{BC} , если $B(6; -1; n)$ и $C(2; n-3; 4)$. Привести полученное уравнение к общему уравнению плоскости и к уравнению в отрезках на осях.

2. Пределы, дифференциальное исчисление

Задание 2.1

Вычислить пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{nx+4}{\sqrt{x^2+n}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-(n+1)x+n}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2+5x+1}{n \cdot x^3+2x+n}$.

Задание 2.2

Вычислить пределы иррациональных функций:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{nx}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^n+2x^3+1}}{x^2+5}$

Задание 2.3

Вычислить предел тригонометрической функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \sin nx}{\operatorname{tg}^3 2x}$

Задание 2.4

Найти производную первого порядка заданной функции $y = \frac{x^n + 1}{\sin x} + (n + 3) \cdot e^{nx+5}$.

Задание 2.5

Вычислить угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $x_0 = n$
 $y = x^2 + nx - (n + 5)$.

Задание 2.6

Вычислить скорость движения материальной точки в указанный момент времени, если
 $s(t) = nt^2 + 3t + (n + 10)$, $t = 3$ сек.

Задание 2.7

Найти экстремумы функции $y = x^3 - 3n^2x + 1$.

Задание 2.8

Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (n+1)x + n}{e^x - e}$$

Задание 2.9

Найти частные производные первого порядка функции $z = x^n y + xy^n + \ln x$ по каждой из независимых переменных.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Образец варианта заданий контрольной работы

1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия, векторная алгебра

Задание 1.1

Найти $2A + \frac{1}{2}B$ и $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 1.2

Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

методом Крамера и методом Гаусса.

Задание 1.3

Найти косинус угла между векторами \overline{AB} и \overline{AC} ,
 $A(1, -2, 3)$, $B(0, -1, 2)$, $C(3, -4, 5)$.

Задание 1.4

Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(5; 2; -3)$; $B(1; 1; -2)$; $C(3; 4; -1)$.

Задание №1.5

Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = \{1; -2; -2\}$, $\vec{b} = \{4; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; -3\}$.

Задание 1.6

Получить уравнение прямой, проходящей:

- а) через точки $M_1(1, 2, 3)$ и $M_2(0, -4, 2)$;
- б) через точку $M_3(1, -2, 4)$ параллельно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Задание 1.7

Получить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4, 2, 3)$ перпендикулярно вектору \overline{BC} , если заданы $B(-4, 0, 1)$ и $C(2, 3, -3)$. Привести полученное уравнение к общему уравнению плоскости и к уравнению плоскости в отрезках на осях.

Задание 2.1

Вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow n} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+2x^2+x+4}{x^3+3x+1}$.

Задание 2.2

Вычислить пределы иррациональных функций: 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+5}}{x^2+2x+7}$

Задание 2.3

Вычислить предел тригонометрической функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin 3x \cdot \sin 7x}{tg^3 x}$

Задание 2.4

Найти производную первого порядка заданной функции $y = \frac{e^x}{e^x+2} - \ln(x^2+1)$.

Задание 2.5

Вычислить угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M_0(2;4)$
 $y = x^2(x-1)^2$

Задание 2.6

Вычислить скорость движения материальной точки $S(t) = (t+1)^3$ через три секунды после его начала.

Задание 2.7

Найти экстремумы функции $y = 2x^3 + 63x^2 + 120x + 11$.

Задание 2.8

Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$

Задание 2.9

Найти частные производные первого порядка функции $z = (x^2 + 3x) \cdot \cos 5y + e^{y^2} \cdot \sin x$ по каждой из независимых переменных.

Решение заданий варианта - образца

Задание 1.1

Найти $2A + \frac{1}{2}B$ и $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение

$$2A + \frac{1}{2}B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 6 + 1 \cdot 2 & -2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \\ -3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 & -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 1.2

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

методом Крамера и методом Гаусса.

Решение

Формулы Крамера для системы 3-го порядка имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – главный определитель заданной системы, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – вспомогательные определители.

Вычислим поочередно $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, раскладывая каждый из них по элементам первой строки.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (1 - (-2)) - 1 \cdot (-1 - 6) + (-1) \cdot (1 - 3) = 2 \cdot 3 + 7 + 2 = 15, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (1 - 2) - 1 \cdot (7 - 8) - 1 \cdot (-7 - 4) = 3 + 1 + 11 = 15, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (7 - 8) - 1 \cdot (-1 - 6) - 1 \cdot (-4 - 21) = -2 + 7 + 25 = 30, \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4 - (-7)) - 1(-4 - 21) + (1 - 3) = 22 + 25 - 2 = 45.$$

По формулам Крамера получаем:

$$x_1 = \frac{15}{15} = 1; \quad x_2 = \frac{30}{15} = 2; \quad x_3 = \frac{45}{15} = 3.$$

Метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований и приведении системы к треугольному виду.

Выпишем расширенную матрицу исходной системы и приведем ее с помощью элементарных преобразований строк к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2]{C_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 + 3C_1 \rightarrow C_3]{C_2 + 2C_1 \rightarrow C_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 2 & 7 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{2C_3 + (-2)C_2 \rightarrow C_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 45 \end{pmatrix}.$$

По полученной матрице выпишем эквивалентную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ 15x_3 = 45. \end{cases}$$

Вычислим теперь последовательно значения неизвестных, начиная с третьего уравнения: $x_3 = \frac{45}{15}$; $x_3 = 3$.

$$3x_2 + 3 \cdot 3 = 15; \quad 3x_2 = 15 - 9; \quad 3x_2 = 6; \quad x_2 = 2.$$

$$-x_1 + 2 + 2 \cdot 3 = 7; \quad -x_1 = 7 - 2 - 6; \quad -x_1 = -1; \quad x_1 = 1.$$

Заметим, что перед записью ответа желательно убедиться в правильности полученного решения, сделав проверку. Для этого подставьте полученное решение в заданную систему.

Ответ: $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3$.

Задание 1.3

Найти косинус угла между векторами \overline{AB} и \overline{AC} : $A(1, -2, 3), \quad B(0, -1, 2), \quad C(3, -4, 5)$.

Решение

Косинус угла между векторами $\vec{a}\{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b}\{x_b, y_b, z_b\}$ находится по формуле: $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$

Найдем координаты вектора \overline{AB} : $\overline{AB} = \{0 - 1; -1 - (-2); 2 - 3\} = \{-1; 1; -1\}$

и координаты вектора \overline{AC} : $\overline{AC} = \{3 - 1; -4 - (-2); 5 - 3\} = \{2; -2; 2\}$.

Определим теперь косинус угла между векторами \overline{AB} и \overline{AC} :

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{-2 - 2 - 2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}} = \frac{-6}{\sqrt{36}} = -\frac{6}{6} = -1.$$

В этом случае можно указать и сам угол между векторами: $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \pi$.

Ответ: $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \pi$.

Задание 1.4

Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(5; 2; -3)$; $B(1; 1; -2)$; $C(3; 4; -1)$.

Решение

Найдем координаты векторов \overline{AB} и \overline{AC} , выходящих из одной вершины треугольника $\overline{AB} = \{(1 - 5); (1 - 2); (-2 - (-3))\} = \{-4; -1; 1\}$.

$$\overline{AC} = \{(3 - 5); (4 - 2); (-1 - (-3))\} = \{-2; 2; 2\}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах \overline{AB} и \overline{AC} , равна половине модуля векторного произведения \overline{AB} и \overline{AC} : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}|$. Найдем $\overline{AB} \times \overline{AC}$, затем вычислим длину (модуль) полученного вектора

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -4\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k} = \{-4; 6; -10\}. \end{aligned}$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-10)^2} = \sqrt{16 + 36 + 100} = \sqrt{152} = 2\sqrt{38}.$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{38} = \sqrt{38}$ кв. единиц.

Задание №1.5

Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = \{1; -2; -2\}$, $\vec{b} = \{4; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; -3\}$.

Решение

Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ через их координаты по известной формуле.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3 + 2) + 2 \cdot (-12 - 3) - 2 \cdot (-8 - 3) = -1 - 30 + 22 = -9.$$

Ответ: -9.

Задание 1.6

Получить уравнение прямой, проходящей:

- а) через точки $M_1(1, 2, 3)$ и $M_2(0, -4, 2)$;
 б) через точку $M_3(1, -2, 4)$ параллельно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Решение

а) Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в пространстве имеют вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

В нашем случае получаем:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-2}{-4-2} = \frac{z-3}{2-3}; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{-1}.$$

б) Уравнения прямой, проходящей через заданную точку $M_3(x_3, y_3, z_3)$ параллельно вектору $\overline{M_1M_2}$ имеют вид: $\frac{x-x_3}{x_2-x_1} = \frac{y-y_3}{y_2-y_1} = \frac{z-z_3}{z_2-z_1}$.

В нашем случае получаем следующие уравнения прямой:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+2}{-4-2} = \frac{z-4}{z_2-z_1}; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-4}{-1}.$$

Ответ: а) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{-1}$; б) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-4}{-1}$.

Задание 1.7

Получить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4, 2, 3)$ перпендикулярно вектору \overline{BC} , если заданы $B(-4, 0, 1)$ и $C(2, 3, -3)$. Привести полученное уравнение к общему уравнению плоскости и к уравнению плоскости в отрезках на осях.

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{BC}\{a, b, c\}$ имеет вид: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Найдем координаты вектора \overline{BC} :

$$\overline{BC} = \{2 - (-4); 3 - 0; -3 - 1\} = \{6; 3; -4\}.$$

Запишем уравнение: $6(x-4)+3(y-2)-4(z-3)=0$.

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение плоскости в общем виде:

$$\begin{aligned} Ax + Bx + Cz + D &= 0 \\ 6x - 24 + 3y - 6 - 4z + 12 &= 0, \\ 6x + 3y - 4z - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить уравнение плоскости в отрезке на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

перенесем "-18" в правую часть уравнения, затем обе части уравнения разделим на "18":

$$6x + 3y - 4z = 18,$$

$$\frac{6x}{18} + \frac{3y}{18} + \frac{-4z}{18} = 1, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-\frac{9}{2}} = 1.$$

Ответ: $6x + 3y - 4z - 18 = 0; \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-\frac{9}{2}} = 1.$

Задание 2.1

Вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-5}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+2x^2+x+4}{x^3+3x+1}$.

Решение

а) Функция, стоящая под знаком предела, является элементарной. Предельное значение $x_0 = 3$ принадлежит ее области определения. Поэтому предел равен значению функции в предельной точке:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-5}} = f(3) = \frac{2 \cdot 3 + 4}{\sqrt{9-5}} = \frac{10}{2} = 5.$$

б) Вначале убедимся, что предел нельзя вычислить непосредственной подстановкой предельного значения переменной $x_0 = 2$ в функцию, стоящую под знаком предела. При $x \rightarrow 2$ эта функция представляет собой отношение двух бесконечно малых величин, иначе говоря, имеет место неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Числитель дроби можно разложить на множители с помощью формулы разности квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Знаменатель дроби представляет собой квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, который, как известно, разлагается на множители по следующей формуле: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Используя эту формулу, получаем $x^2 + 3x - 10 = (x-2) \cdot (x+5)$. В нашем случае: $a = 1, x_1 = 2, x_2 = -5$.

Итак, получаем: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{7}.$

Как видим, после сокращения дроби на множитель $(x-2)$, стремящийся к нулю, неопределенность исчезла, и предел удалось вычислить, подставив вместо переменной x ее предельное значение $x_0 = 2$.

в) При $x \rightarrow \infty$ функция, стоящая под знаком предела, представляет собой отношение двух бесконечно больших функций. Иначе говоря, имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Высшая степень переменной в числителе $n = 3$. Высшая степень переменной в знаменателе также равна 3. Поэтому и числитель, и знаменатель разделим почленно на x^3 . Затем, используя арифметические свойства пределов и простейший предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0$ ($c = \text{const}$), получим ответ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 + x + 4}{x^3 + 3x + 1} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{5 + 0 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 5. \end{aligned}$$

Ответ: а) 5; б) $4/7$; в) 5.

Задание 2.2

Вычислить пределы иррациональных функций: 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+5}}{x^2+2x+7}$

Решение

1) Непосредственной подстановкой вместо x значения $x_0 = 3$ убеждаемся в том, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим и числитель, и знаменатель дроби на выражение $(\sqrt{x+1}+2)$, которое является «сопряженным» к числителю $(\sqrt{x+1}-2)$ согласно формуле разности квадратов. После этого в числителе исчезнет иррациональность и выделится множитель, стремящийся к нулю. Затем удастся $(x-3)$ сократить дробь на этот множитель.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2) При $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель есть бесконечно большие функции, то

есть имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Высшая степень переменной в знаменателе равна 2. Определим высшую степень переменной в числителе: $\sqrt{x^4} = (x^4)^{\frac{1}{2}} = x^{4 \cdot \frac{1}{2}} = x^2$. Итак, высшая степень переменной в числителе также равна двум.

Разделим и числитель, и знаменатель на x^2 . После этого сможем вычислить

$$\begin{aligned} \text{предел: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 5}}{x^2 + 2x + 7} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4 + 5}}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{7}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4 + 5}{x^4}}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{x^4}}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{\sqrt{1 + 0}}{1 + 0 + 0} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Задание 2.3

Вычислить предел тригонометрической функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin 3x \cdot \sin 7x}{\operatorname{tg}^3 x}$

Решение

Подставим $x_0 = 0$ в функцию, стоящую под знаком предела.

Убеждаемся в том, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности воспользуемся следующими эквивалентностями при $x \rightarrow 0$: $\sin 3x \sim 3x$; $\sin 7x \sim 7x$; $[\operatorname{tg} x]^3 \sim x^3$. Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin 3x \cdot \sin 7x}{\operatorname{tg}^3 x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 3x \cdot 7x}{x^3} = 21 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3} = 21 \lim_{x \rightarrow 0} x = 21 \cdot 0 = 0.$$

Ответ: 0.

Задание 2.4

Найти производную первого порядка функции $y = \frac{e^x}{e^x + 2} - \ln(x^2 + 1)$.

Решение

Используя правила дифференцирования и таблицу производных, получим:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{e^x}{e^x + 2} - \ln(x^2 + 1) \right)' = \left(\frac{e^x}{e^x + 2} \right)' - (\ln(x^2 + 1))' = \\ &= \frac{(e^x)'(e^x + 2) - e^x(e^x + 2)'}{(e^x + 2)^2} - \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{e^x(e^x + 2) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 2)^2} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x - e^{2x}}{(e^x + 2)^2} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2e^x}{(e^x + 2)^2} - \frac{2x}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{2e^x}{(e^x + 2)^2} - \frac{2x}{x^2 + 1}.$

Задание 2.5

Вычислить угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M_0(2;4)$
 $y = x^2(x-1)^2$.

Решение

Найдём производную заданной функции

$$y' = [x^2(x-1)^2]' \Rightarrow y' = (x^2)' \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot [(x-1)^2]'$$

$$y' = 2x(x-1)^2 + x^2 \cdot 2(x-1) \cdot (x-1)', \quad y' = 2x(x-1)^2 + 2x^2 \cdot (x-1)$$

$$y'(x) = 2x \cdot (x-1) \cdot (x-1+x), \quad y'(x) = 2x(x-1)(2x-1).$$

Вычислим производную в точке касания, то есть при $x_0 = 2$

$$y'(x_0) = y'(2) = 2 \cdot 2(2-1) \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 12.$$

Это и есть угловой коэффициент касательной в точке $M_0(2;4)$, $k=12$.

Ответ: $k=12$.

Задание 2.6

Вычислить скорость движения материальной точки $S(t) = (t+1)^3$ через три секунды после его начала.

Решение

Найдём скорость движения в произвольный момент времени, продифференцировав заданную функцию

$$V(t) = S'(t) = [(t+1)^3]' = 3 \cdot (t+1)^2 \cdot (t+1)' = 3(t+1)^2.$$

Вычислим теперь скорость при $t_0 = 3$: $V(3) = 3 \cdot (3+1)^2 = 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$.

Ответ: 48

Задание 2.7

Найти экстремумы функции $y = 2x^3 + 63x^2 + 120x + 11$.

Решение




1) Найдём область определения функции: $D(y): x \in \mathbb{R}$.

2) Найдём критические точки:

$$y' = 6x^2 + 126x + 120, \quad 6x^2 + 126x + 120 = 0, \quad x^2 + 21x + 20 = 0,$$

$$x_1 = -20, \quad x_2 = -1.$$

3) Исследуем критические точки с помощью достаточных условий экстремума, результаты исследований представим в виде таблицы:

x	$(-\infty, -20)$	-20	$(-20, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y		max		min	

4) Вычислим значение функции в точках $x_1 = -20$ и $x_2 = -1$:

$$y_{\max}(-20) = 2 \cdot (-20)^3 + 63 \cdot (-20)^2 + 120 \cdot (-20) + 11 = 6811,$$

$$y_{\min}(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 63 \cdot (-1)^2 + 120 \cdot (-1) + 11 = -48.$$

Ответ: $y_{\max}(-20) = 6811, \quad y_{\min}(-1) = -48$.

Задание 2.8

Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}.$$

Решение

Подставляя в функцию под знаком предела значение $x_0 = 5$, убеждаемся в том, что имеет место неопределённость $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя один раз:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 7x + 10)'}{(x^2 - 4x - 5)'} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 7}{2x - 4} = \frac{10 - 7}{10 - 4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задание 2.9

Найти частные производные первого порядка функции $z = (x^2 + 3x) \cdot \cos 5y + e^{y^2} \cdot \sin x$ по каждой из независимых переменных.

Решение

Заданная функция зависит от двух переменных, следовательно, имеет две частные производные первого порядка.

$$z'_x = (x^2 + 3x)' \cdot \cos 5y + e^{y^2} \cdot (\sin x)' = (2x + 3) \cos 5y + e^{y^2} \cdot \cos x;$$

$$z'_y = (x^2 + 3x) \cdot (\cos 5y)' + (e^{y^2})' \cdot \sin x = -5(x^2 + 3x) \sin 5y + 2y \cdot e^{y^2} \cdot \sin x.$$

Ответ: $z'_x = (2x + 3) \cos 5y + e^{y^2} \cdot \cos x$, $z'_y = 2y \cdot e^{y^2} \cdot \sin x - 5(x^2 + 3x) \sin 5y$.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Аналитическая геометрия, линейная алгебра, векторная алгебра

1. Общее уравнение прямой линии на плоскости

Всякое уравнение $f(x, y) = 0$, связывающее координаты x и y , называется *уравнением линии* L на плоскости, если: 1) координаты каждой точки линии L удовлетворяют этому уравнению, 2) координаты всякой точки, не лежащей на линии L , не удовлетворяют этому уравнению.

Уравнение первой степени относительно переменных x и y , т. е. уравнение вида:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

где A, B, C – действительные числа, причем A и B не обращаются в ноль одновременно ($A^2 + B^2 \neq 0$), определяет на плоскости прямую линию. Это уравнение называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

Если $A = 0$, т.е. уравнение не содержит x , то оно представляет прямую, параллельную оси Ox : $\boxed{By + C = 0}$

Если $A \neq 0, C \neq 0$ уравнение не содержит y , то оно представляет прямую, параллельную оси Oy :

Если $C = 0$, то уравнение определяет прямую линию, проходящую через начало координат: $Ax + By = 0$

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Всякую прямую на плоскости, не параллельную оси ординат, можно представить уравнением вида: $y = kx + b$

Это уравнение называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Число k равно тангенсу угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox (рис. 1), $k = \operatorname{tg} \varphi$. Это число называют *угловым коэффициентом прямой*. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy .

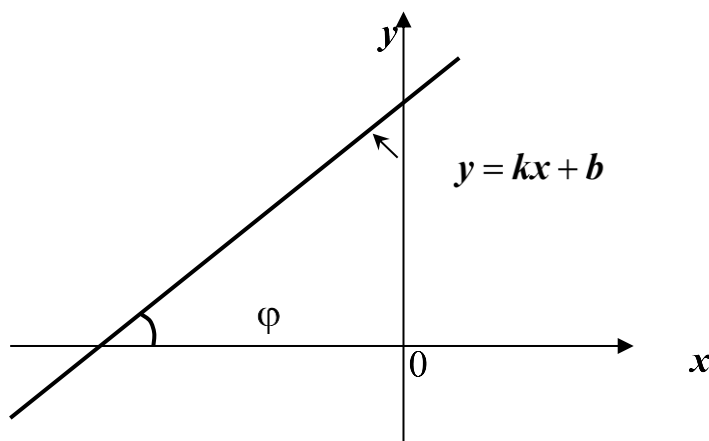


Рис. 1

По абсолютной величине число b равно длине отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. Если b равно нулю, то прямая линия проходит через начало координат. Если $b > 0$, то отрезок отсекается над осью абсцисс, если $b < 0$, то – под ней.

3. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Угол между двумя прямыми линиями на плоскости (рис. 2), заданными уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, представляется формулой:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Замечание 1. Эта формула определяет угол, на который нужно повернуть первую прямую против часовой стрелки около точки пересечения данных прямых для того, чтобы она совместилась со второй. Поскольку при нахождении угла любую из прямых можно считать первой, а другую – второй, то могут получаться разные по знаку значения тангенса угла. В зависимости от этого угол α может быть либо острым углом, либо углом второй четверти.

Пример. Вычислить угол между прямыми: $y = 2x - 5$, $y = -3x + 7$.

Решение. Угловые коэффициенты данных прямых: $k_1 = 2$, $k_2 = -3$. По формуле находим: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3-2}{1+2(-3)} = 1$, $\alpha = 45^\circ$.

Это значит, что первая прямая $y = 2x - 5$, повернутая около точки пересечения на угол $\alpha = 45^\circ$, совместится с прямой $y = -3x + 7$.

Если считать прямую $y = -3x + 7$ первой, а прямую $y = 2x - 5$ второй, то $k_1 = -3$, $k_2 = 2$ и по формуле получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2+3}{1+2(-3)} = -1, \quad \alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Это значит, что прямая $y = -3x + 7$, повернутая около точки пересечения данных прямых против часовой стрелки на угол $\alpha = 135^\circ$, совместится с прямой $y = 2x - 5$.

Таким образом, в качестве ответа можно указать и угол $\alpha = 45^\circ$, и угол $\alpha = 135^\circ$. Ответ зависит от того, какую из данных прямых при решении рассматривали в качестве первой.

Из формулы нахождения угла между прямыми следуют условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.

Условие параллельности двух прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности: $1 + k_1 k_2 = 0$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Замечание 2. Если хотя бы одна из заданных прямых параллельна оси ординат, то указанная формула для нахождения угла между двумя прямыми не применима.

Если первая прямая параллельна оси ординат, т. е. $k_1 = 0$, а вторая нет, то применяется формула

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{k_2}$$

Если вторая прямая параллельна оси ординат, т. е. $k_2 = 0$, а первая нет, то угол между ними определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{k_1}$$

Если обе прямые параллельны оси ординат, то они параллельны и между собой, так что угол между ними равен нулю.

Замечание 3. Если прямые, не параллельные оси ординат, заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол между ними можно найти по

следующей формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

Условие параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями: $A_1:A_2 = B_1:B_2$.

Условие перпендикулярности: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

4. Уравнение прямой в отрезках на осях

Если прямая линия отсекает на осях не равные нулю отрезки a и b (рис. 3), то ее можно представить уравнением $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, которое называется *уравнением прямой в отрезках на осях*.

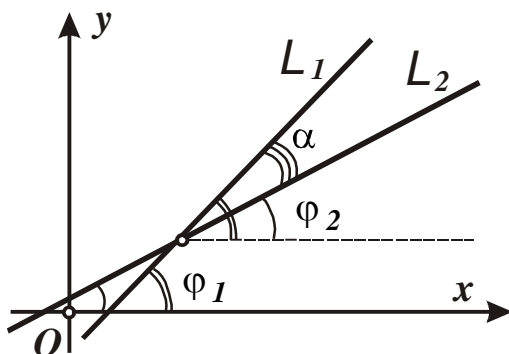


Рис. 2

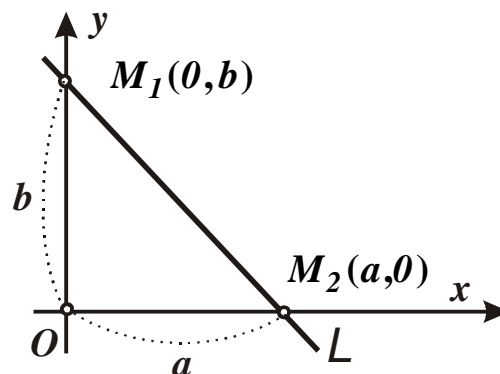


Рис. 3

Числа a , b могут быть как положительными, так и отрицательными. Если, например, прямая отсекает на оси абсцисс отрезок, расположенный слева от нуля, то $a < 0$.

Если прямая линия проходит через начало координат, то ее нельзя представить уравнением в отрезках на осях.

5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Если известно, что прямая линия проходит через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то ее уравнение имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно (перпендикулярно) данной прямой. Пучок прямых

Прямая, проходящая через заданную точку $M(x_0, y_0)$ параллельно заданной прямой $y = kx + b$, представляется уравнением: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Прямая, проходящая через заданную точку $M(x_0, y_0)$ перпендикулярно данной прямой $y = kx + b$, задается уравнением: $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$.

Замечание. Уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $M(x_0, y_0)$ — заданная точка, а $k < \infty$ — произвольное (не фиксированное) число, определяет множество всех прямых плоскости, проходящих через точку $M(x_0, y_0)$ (кроме той, которая параллельна оси ординат). Такое множество прямых называют *пучком прямых*. Число k называют при этом *параметром пучка*, а точку $M(x_0, y_0)$ — *центром пучка*. При каждом фиксированном значении параметра k задается одна из прямых линий пучка.

Например, уравнение $y + 5 = k(x - 3)$ определяет на плоскости пучок с центром в точке $M(-5; 3)$. При $k = 7$ получим одну прямую линию из этого пучка: $y + 5 = 7(x - 3)$, или: $y = 7x - 26$.

7. Определители второго порядка

Определителем второго порядка называется число Δ , записанное в виде квадратной таблицы чисел, состоящей из двух строк и двух столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Величины $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ называются при этом *элементами определителя*. Каждый элемент a_{ij} , $i, j = 1, 2$, имеет двойной индекс, первый из них указывает номер строки, в которой находится элемент, второй - номер столбца.

Вычисляется определитель второго порядка по следующей формуле:

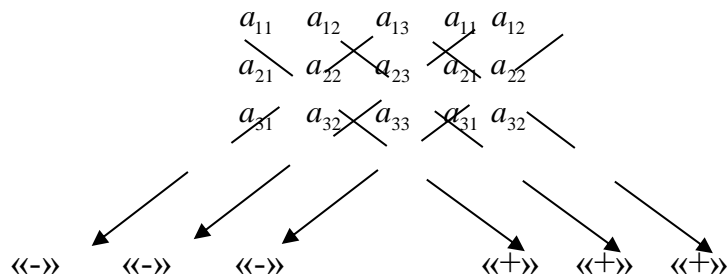
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

8. Определители третьего порядка

Определителем третьего порядка называется число Δ , записанное в виде квадратной таблицы чисел, состоящей из трех строк и трех столбцов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Существует несколько способов вычисления определителей третьего порядка. Определитель третьего порядка, в частности, можно вычислить *по правилу Саррюса*. Для этого к столбцам определителя приписывают справа первые его два столбца и вычисляют шесть слагаемых по следующей схеме.

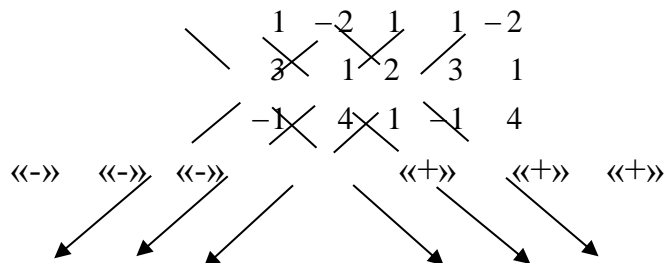


Стрелки указывают на то, какие элементы перемножаются, знаки показывают, с каким знаком берутся эти произведения: с тем, который они имеют или с противоположным. Получается следующее равенство

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}).$$

Пример. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Вначале составим схему вычисления. Для этого допишем к элементам определителя справа два первых столбца.



Получим

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 4 - ((-1) \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-2)) = \\ = 1 + 4 + 12 - (-1 + 8 - 6) = 17 - (-1) = 17 + 1 = 16.$$

Определители третьего порядка можно свести к вычислению трех определителей второго порядка *методом разложения по элементам какой-либо его строки или столбца*.

В частности, разложение по элементам первой строки будет иметь вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Разложение по элементам, например, второго столбца будет таким:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Аналогично производится разложение по элементам других строк и столбцов. При этом используется следующая шахматная схема расстановки знаков перед слагаемыми

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Определители второго порядка, указанные в разложениях, получаются вычеркиванием тех строки и столбца, в которых находится стоящий перед ними в качестве множителя элемент a_{ij} .

Пример. Вычислить определитель разложением по третьей строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ = (-1) \cdot ((-2) \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 4 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 3) = \\ = -(-5) - 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 7 = 5 + 4 + 7 = 16.$$

При разложении по третьей строке учли расстановку знаков по указанной выше схеме. Для третьей строки знаки чередуются так: «+», «-», «+».

Определители второго порядка получали, мысленно вычеркивая из заданного определителя те строку и столбец, в которых находится элемент, который служит множителем.

Замечание 1. Аналогично вводятся понятия определителей и более высоких порядков: четвертого, пятого и т. д. Такие определители вычисляются только методом разложения по элементам какой-либо строки или столбца.

9. Свойства определителей

Свойство 1. При перестановке двух строк (столбцов) знак определителя изменится на противоположный.

Свойство 2. Общий множитель элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.

Свойство 3. При умножении определителя на число на это число умножаются все элементы лишь одной какой-либо его строки (столбца).

Свойство 4. Определитель, содержащий нулевую строку (столбец), равен нулю.

Свойство 5. Определитель, содержащий равные (или пропорциональные) строки (столбцы), равен нулю.

Свойство 6. Если каждый элемент какой-то строки (столбца) есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей: в одном в этой строке (столбце) вместо суммы стоит только первое слагаемое, в другом - только второе. Все остальные элементы обоих определителей такие же, как и в заданном определителе.

Свойство 7. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, а столбцы – соответствующими строками. Такая операция называется *транспонированием* определителя.

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

10. Вектор и его длина. Коллинеарные векторы. Равенство векторов

Существует два вида величин: скалярные и векторные. *Скалярной величиной* или *скаляром* называется величина, не обладающая направлением. *Векторной величиной* или *вектором* (в широком смысле) называется всякая величина, обладающая направлением.

Например, масса тела есть величина скалярная, так как не связана ни с каким направлением. Сила, действующая на материальное тело, представляет собой векторную величину, поскольку обладает направлением.

В аналитической геометрии *вектором* называется направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B (рис.4).

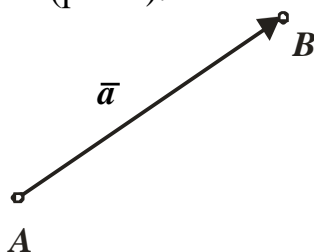


Рис.4

Обозначают вектор одним из следующих способов: \overline{AB} , \vec{AB} , \vec{a} , \vec{a} . Расстояние между точками A , B (длина отрезка AB) называется *длиной* или *модулем* вектора, обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\vec{a}|$. Модуль вектора – скалярная величина.

Вектор, длина которого (расстояние между точками A , B) равна нулю, называется *нулевым*. У нулевого вектора начало совпадает с его концом, т.е. нулевой вектор представляет собой пару совпадающих точек.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же), называются *коллинеарными* или *параллельными*. Коллинеарные векторы, имеющие одно и то же направление, называются *сонаправленными*. *Противоположно направленными* называются коллинеарные векторы, направленные в противоположные стороны.

Два (ненулевых) вектора считаются *равными*, если они сонаправлены и имеют равные длины. Все нулевые векторы считаются равными.

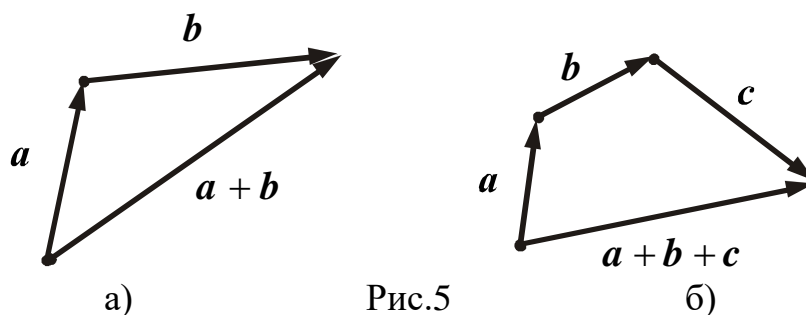
Замечание. Равные векторы можно совместить с помощью параллельного переноса.

Два противоположно направленных вектора, имеющие равные длины, называются *противоположными*. Их обозначают так: \vec{a} и $-\vec{a}$.

11. Сложение векторов

Результатом сложения векторов \vec{a} и \vec{b} является третий вектор \vec{c} - сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$. Вектор-сумму можно построить так: вначале построить вектор \vec{a} , расположив его начало в произвольной точке. Затем построить вектор \vec{b} , считая его началом конец первого слагаемого, вектора \vec{a} . Вектор, начало которого совпадает с началом вектора \vec{a} , а конец - с концом вектора \vec{b} , есть вектор $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 5,а). Такое правило построения суммы двух ненулевых векторов называется *правилом треугольника*.

Сложение векторов можно распространить на любое число векторов. Первый вектор строится из произвольной точки, из его конца строится второй вектор, из конца второго вектора - третий и т.д. Вектор, начало которого совпадает с началом первого слагаемого, а конец - с концом последнего, есть вектор - сумма. Такое правило построения суммы более чем двух ненулевых векторов называют *правилом многоугольника* (*правилом замкнутой ломаной*) или *правилом цепи*. Сумма трех векторов изображена на рис. 5,б).



Сумму двух ненулевых и неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} , начала которых совмещены, изображают вектором с тем же началом и совпадающим с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы \vec{a} и \vec{b} . Такое построение вектора-суммы называют *правилом параллелограмма*. К коллинеарным векторам правило параллелограмма не применимо.

Сумма векторов обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Сумма противоположных векторов равна нулевому вектору.

Свойство 2. От перестановки слагаемых сумма векторов не меняется.

12. Вычитание векторов

Вычитание векторов определяется как действие, обратное сложению.

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется третий вектор $\vec{a} - \vec{b}$ такой, что сумма векторов \vec{b} и $\vec{a} - \vec{b}$ будет равна вектору \vec{a} .

Разность векторов \vec{a} и \vec{b} строится так: из произвольного начала строят векторы \vec{a} и \vec{b} . Вектор, начало которого совпадает с концом вектора \vec{b} (вычитаемого), а конец – с концом вектора \vec{a} (уменьшаемого), есть разность векторов \vec{a} и \vec{b} (рис. 6).

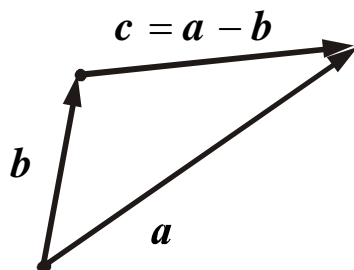


Рис. 6

13. Умножение вектора на число

Умножить вектор \vec{a} на число λ означает, что нужно построить новый вектор $\lambda \vec{a}$, параллельный \vec{a} и удовлетворяющий условиям:

- 1) векторы \vec{a} и $\lambda \vec{a}$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$;
- 2) длина вектора $\lambda \vec{a}$ равна произведению длины вектора \vec{a} на модуль числа λ (рис. 7).

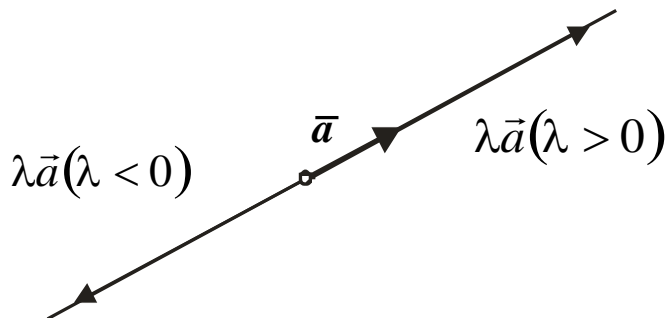


Рис. 7

Операция умножения вектора на число обладает теми же свойствами, что и умножение чисел.

Замечание. Если вектор \vec{a} ненулевой, то всякий вектор \vec{b} , коллинеарный \vec{a} , можно представить в виде $\lambda \vec{a}$.

14. Разложение вектора по базису. Координаты вектора

Свободный вектор \vec{a} (т. е. такой вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства) в пространстве с декартовой системой координат $Oxyz$ может быть единственным способом представлен

в виде: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – базисные векторы (орты осей Ox, Oy, Oz , т. е. единичные векторы, направление которых совпадает с положительным направлением соответствующих осей).

Такое представление вектора \vec{a} называется *разложением по базису* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Числа a_x, a_y, a_z называются *координатами вектора* \vec{a} в этом базисе, они равны проекциям вектора \vec{a} на соответствующие оси.

В координатной форме вектор \vec{a} можно записать так: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

15. Координаты вектора через координаты его начала и конца

Координаты вектора \vec{AB} по координатам его начала $A(x_A; y_A; z_A)$ и конца $B(x_B; y_B; z_B)$ находятся следующим образом:

$$\vec{AB} = \{(x_B - x_A); (y_B - y_A); (z_B - z_A)\}.$$

Иначе говоря, для нахождения координат вектора необходимо из координат конца вычесть соответствующие координаты начала.

16. Длина вектора. Расстояние между двумя точками

Длина вектора, заданного своими координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, определяется формулой: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Замечание. Расстояние между двумя точками пространства $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ вычисляется как длина вектора, имеющего начало в одной из этих точек, а конец – в другой:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

17. Действия над векторами, заданными в координатной форме. Условие параллельности (коллинеарности) векторов

Линейные операции: сложение, вычитание и умножение на число над векторами, заданными своими координатами, выполняются покомпонентно, т. е. если векторы \vec{a} , \vec{b} заданы координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, λ – число, то справедливы формулы:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \{(a_x + b_x); (a_y + b_y); (a_z + b_z)\} \\ \vec{a} - \vec{b} &= \{(a_x - b_x); (a_y - b_y); (a_z - b_z)\} \\ \lambda \vec{a} &= \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}.\end{aligned}$$

Условие параллельности векторов. Если ненулевые векторы $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ параллельны (коллинеарны), то выполняется соотношение: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, а для

их координат справедливы равенства:

$$\boxed{\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}}$$

18. Скалярное произведение двух векторов. Физический смысл скалярного произведения

Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих векторов $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ на косинус угла (\vec{a}, \vec{b}) между ними.

Обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или (\vec{a}, \vec{b}) .

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})}$$

Замечание. Скалярное произведение нельзя распространить на случай трех сомножителей.

Физический смысл скалярного произведения. Если вектор \vec{a} представляет собой силу, действующую на материальную точку, вектор \vec{b} – смещение этой точки в

результате воздействия силы \vec{a} , то скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ численно равно работе силы \vec{a} .

19. Свойства скалярного произведения

Свойство 1 (переместительное свойство): $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

Свойство 2 (скалярный квадрат): $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

Свойство 3 (условие равенства нулю скалярного произведения ненулевых векторов): если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Свойство 4 (сочетательное свойство относительно скалярного множителя): $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a}, \vec{b})$.

Свойство 5. (распределительное свойство): $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.

20. Вычисление скалярного произведения через координаты сомножителей

Если векторы-сомножители заданы в координатной форме $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

21. Угол между векторами. Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов

Из определения скалярного произведения следует формула для вычисления косинуса угла между двумя векторами $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

С учетом правил вычисления длины вектора и скалярного произведения в координатной форме, если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, получаем:

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов. Два ненулевых вектора перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$

22. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий следующим трем условиям:

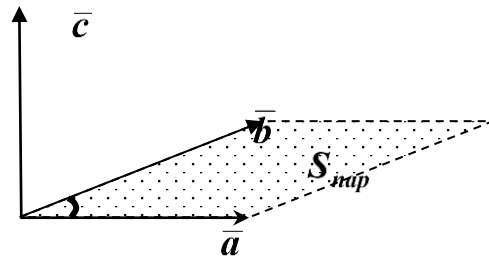
1. Длина вектора \vec{c} равна площади параллелограмма, сторонами которого служат векторы-сомножители \vec{a} и \vec{b} :

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

2. Вектор \vec{c} перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} .

3. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ после приведения к общему началу ориентирована так же, как тройка базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (правая тройка) (рис. 8).

Тройка ненулевых и не параллельных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятых в указанном порядке, называется *правой*, если кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} виден наблюдателю из конца третьего вектора \vec{c} против часовой стрелки. Если же такой поворот совершается по часовой стрелке, то тройка называется *левой*.



Рис

Обозначают векторное произведение так: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Замечание. Векторное произведение широко применяется в физике и механике. Например, через векторное произведение вычисляется момент силы, приложенной к материальной точке.

23. Свойства векторного произведения.

Свойство 1. При перестановке сомножителей местами векторное произведение меняет знак, то есть, векторное произведение не обладает переместительным свойством

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Свойство 2. Векторное произведение вектора на себя равно нулевому вектору.

Свойство 3. Если векторное произведение ненулевых векторов равно нулевому вектору, то векторы – сомножители параллельны

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Свойство 4 (сочетательное свойство):

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Свойство 5 (распределительное свойство):

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{d}.$$

24. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то векторное произведение \vec{a} и \vec{b} находится по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Разложением определителя по первой строке получается следующее представление векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

25. Площадь параллелограмма через векторное произведение. Площадь треугольника

Геометрический смысл векторного произведения. Модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, сторонами которого служат векторы – сомножители $S_{\text{пар.}} = | \overline{AB} \times \overline{AC} |$.

Как следствие из этой формулы получается формула вычисления площади треугольника, сторонами которого являются векторы – сомножители:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot | \overline{AB} \times \overline{AC} |.$$

26. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл смешанного произведения. Компланарные векторы

Смешанным произведением трех векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (взятых в указанном порядке) называется число, равное скалярному произведению векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и \vec{c} : $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$. Обозначают его так: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}).$$

Три вектора называются *компланарными*, если они, будучи приведенными к общему началу, расположены в одной плоскости. Среди этих векторов могут быть и нулевые векторы.

Геометрический смысл смешанного произведения. Модуль смешанного произведения трех некопланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (векторы – сомножители служат ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины).

Условие компланарности векторов. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

27. Свойства смешанного произведения

Свойство 1. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке сомножителей $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$.

Свойство 2. При перестановке любых двух сомножителей местами смешанное произведение меняет знак $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$; $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$; $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$.

Свойство 3. Смешанное произведение не изменится, если в нем поменять местами векторное и скалярное произведения $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$.

Свойство 4. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Свойство 5 (распределительное свойство) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$.

Свойство 6 (сочетательное свойство) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Свойство 7. Если смешанное произведение трех некопланарных векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (взятых в указанном порядке) положительно, то векторы – сомножители (в таком же порядке) образуют правую тройку, если же смешанное произведение отрицательно, то векторы – сомножители образуют левую тройку.

28. Выражение смешанного произведения через координаты

сомножителей. Признак компланарности в координатной форме

Через координаты векторов-сомножителей $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ смешанное произведение находится по следующей формуле:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Признак компланарности трех векторов в координатной форме. Векторы \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} компланарны тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

29. Объем параллелепипеда. Объем треугольной пирамиды

Объем параллелепипеда $V_{пар.}$, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, (т.е. эти векторы служат ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины) и объем образованной ими треугольной пирамиды $V_{пир.}$ находятся по следующим формулам:

$$V_{пар.} = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|; \quad V_{пир.} = \frac{1}{6} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$$

30. Общее уравнение плоскости. Особые случаи расположения плоскости относительно системы координат

Уравнение любой плоскости можно записать в следующем виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (числа A, B, C не равны нулю одновременно). Такое уравнение называется *общим уравнением плоскости*.

Вектор $\bar{N} = \{A; B; C\}$ перпендикулярен плоскости (рис.9), его называют *нормальным вектором плоскости* (или вектором-нормалью).

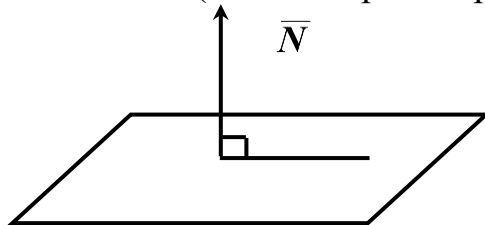


Рис. 9

31. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны тогда и только тогда, когда параллельны их нормальные векторы $(\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2)$, а это равносильно следующему условию: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их векторы нормали $(\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2)$. Условием перпендикулярности двух векторов служит следующее условие $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

32. Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ находится как угол между их нормальными векторами

$$\cos \varphi = \cos(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

33. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно заданной плоскости (перпендикулярно заданному вектору)

Плоскость, проходящая через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, задается уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Если плоскость проходит через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$, то она представляется уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

34. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

35. Уравнение плоскости в отрезках на осях

Если плоскость отсекает на координатных осях отрезки a , b , c , не равные нулю (рис. 10), то ее можно представить уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

которое называется «уравнением плоскости в отрезках на осях».

Замечание. Числа a , b , c могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от того, на какой части оси плоскость отсекает отрезок. Если, например, плоскость отсекает отрезок на отрицательной части оси Ox , то $a < 0$.

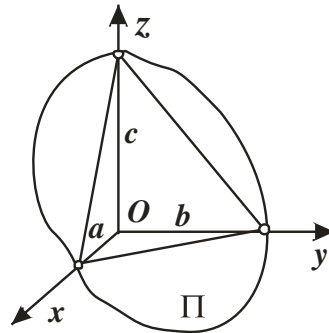


Рис. 10

36. Канонические (симметричные) уравнения прямой линии в трехмерном пространстве

Прямая линия в трехмерном пространстве может быть задана *каноническими уравнениями*

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}},$$

где точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – любая фиксированная точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\vec{S} = \{l; m; n\}$, называемый *направляющим вектором прямой*, параллелен этой прямой.

Заметим, что в качестве направляющего вектора прямой можно взять любой вектор, который параллелен ей.

Канонические уравнения выражают условие параллельности направляющего вектора прямой и вектора $\overline{MM_0}$, где M_0 – фиксированная точка прямой, а M – текущая точка этой прямой.

Замечание. Канонические уравнения прямой в пространстве также называются *симметричными уравнениями*.

37. Угол между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями

Угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями, $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$, определяется как угол между их направляющими векторами

$$\boxed{\cos \varphi = \cos(\vec{S}_1 \wedge \vec{S}_2) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}}$$

Условие параллельности двух прямых, заданных параметрическими уравнениями

$$(\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2): \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых $(\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2): \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$

38. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ удовлетворяет соотношению (рис. 11): $\varphi = \frac{\pi}{2} - (\bar{N} \wedge \bar{S})$.

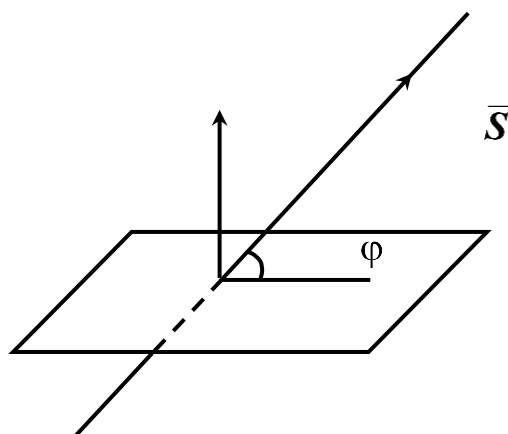


Рис.

Поэтому справедлива формула: $\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости ($\bar{N} \parallel \bar{S}$): $Al + Bm + Cn = 0$.

Условие параллельности прямой и плоскости ($\bar{N} \perp \bar{S}$): $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$.

39. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Если прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то она представляется следующим уравнением

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

40. Матрицы. Виды матриц

Матрицей размерности $m \times n$ (m на n) называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кратко матрицу можно записать так:

$$A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} \text{ или } A = (a_{ij}).$$

Каждый элемент матрицы, как и элемент определителя, имеет двойной индекс, указывающий на номер строки и номер столбца, в которых расположен элемент.

Матрицу называют *квадратной*, если количество ее строк равно количеству столбцов: $m = n$. Число n при этом называют *порядком квадратной матрицы*.

Квадратной матрице можно поставить в соответствие определитель, состоящий из ее элементов. Его называют *определителем матрицы* и обозначают $|A|$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *невыврожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Единичной матрицей называют квадратную матрицу, элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные – 0. Например, единичная матрица третьего порядка имеет вид: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Квадратную матрицу называют *верхнетреугольной*, если все ее элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Квадратную матрицу называют *нижнетреугольной*, если все ее элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю.

Например, матрица A – *верхнетреугольная*, матрица B – *нижнетреугольная*:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T , строками которой служат соответствующие столбцы матрицы A , а столбцами – соответствующие строки матрицы A , называется *транспонированной матрицей* для матрицы A .

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

41. Действия над матрицами: сложение, умножение на число, произведение матриц

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ называется матрица $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Иначе говоря, чтобы сложить две матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы (элементы с одинаковыми индексами). Очевидно, что *складывать можно только матрицы одинаковой размерности*.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})$. Таким образом, чтобы умножить матрицу на число, следует все ее элементы умножить на это число.

Пусть матрица $A = (a_{ij})$ имеет размерность $m \times p$, матрица $B = (b_{jk})$ имеет размерность $p \times n$. *Произведением* матрицы A на матрицу B называется матрица $C = A \cdot B$ размерности $m \times n$, элементы которой определяются формулой:

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} \cdot b_{jk}$$

$i=1, \dots, m; \quad k=1, \dots, n$, т. е. элемент c_{ik} матрицы-произведения, стоящий в i -ой строке и k -ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i -ой строки матрицы A и k -го столбца матрицы B . Иначе говоря, чтобы умножить матрицу A на матрицу B , необходимо строки A умножать поочередно на столбцы B и результаты записывать по строкам.

Замечание. Две матрицы можно перемножить лишь при условии, что количество столбцов первого множителя равно количеству строк второго. При этом в результате получится матрица, у которой строк столько же, сколько их у первого множителя, а столбцов столько, сколько их у второго.

42. Свойства действий над матрицами

Пусть A, B, C – матрицы; α, β – числа. Справедливы следующие свойства действий над матрицами:

Свойство 1. Ассоциативность операции сложения: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Свойство 2. Коммутативность операции сложения: $A + B = B + A$.

Свойство 3. Ассоциативность операции произведения: $(AB)C = A(BC)$.

Свойство 4. Произведение матриц не коммутативно: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(Иногда найти произведение $A \cdot B$ возможно, а $B \cdot A$ – нет.)

Свойство 5. Дистрибутивный закон: $A(B + C) = AB + AC$; $(B + C)A = BA + CA$.

Свойство 6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

43. Ранг матрицы

Пусть задана матрица A размерности $m \times n$. Выделим в ней k произвольных строк и k произвольных столбцов ($k \leq m, k \leq n$). Определитель k -го порядка, составленный из элементов матрицы A , расположенных на пересечении выбранных строк и столбцов, называется минором k -го порядка матрицы A .

Например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots & 7 & \dots & 3 & \dots & 2 & \dots \\ \dots & 4 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 5 & \dots \\ \dots & 2 & \dots & 2 & \dots & 6 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

выберем две первые строки и два последних столбца. Элементы, стоящие на их пересечении, образуют определитель второго порядка, который представляет собой один из миноров матрицы A второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$.

Сами элементы матрицы считаются минорами первого порядка.

Рангом матрицы называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля, обозначается ранг $r(A)$.

Всякий отличный от нуля минор матрицы A , порядок которого равен рангу, называется *базисным минором матрицы*.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если выполняется равенство $r(A) = r(B)$. Эквивалентные матрицы обозначаются так: $A \sim B$.

Вычислить ранг матрицы с помощью определения затруднительно, поскольку даже матрица небольшой размерности имеет значительное количество миноров.

Для нахождения ранга матрицу с помощью элементарных преобразований приводят к трапецевидной (в частности, к верхнетреугольной) эквивалентной матрице (элементарные преобразования сохраняют ранг), ранг которой вычисляется устно.

Под *трапецевидной формой матрицы* понимают такую форму, в которой все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

- 1) замену строк столбцами, а столбцов соответствующими строками (транспонирование матрицы);
- 2) перестановку строк (столбцов) местами;
- 3) вычеркивание строки (столбца), все элементы которой равны нулю;
- 4) умножение какой-либо строки (столбца) на отличное от нуля число;
- 5) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Пример. Вычислить ранг матрицы A , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Чтобы получить нулевые элементы в первом столбце ниже диагонального, выполним следующие элементарные преобразования:

- ✓ вторую строку сложим с первой, умноженной на число (-3) ;
- ✓ третью строку сложим с первой, умноженной на число (-2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Для получения нулевого элемента во втором столбце ниже диагонального из третьей строки вычтем вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В последней матрице трапецевидной формы на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов находятся элементы, которые образуют минор второго порядка

отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.

Все миноры третьего порядка равны нулю, так как содержат строку из нулей. Следовательно, ранг матрицы как полученной в результате преобразований, так и заданной, равен 2: $r(A) = 2$. Рассмотренный отличный от нуля минор второго порядка является базисным.

Заметим, что все проведенные элементарные преобразования можно оформить коротко следующим образом, обозначая через C строки матрицы, а через S – ее столбцы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3: C_3 + (-2)C_1]{C_2: C_2 + (-3)C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3: C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Ответ: $r(A) = 2$.

44. Системы линейных уравнений

Система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – неизвестные, а $a_{ij}, b_i, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ – заданные числа, называется *системой m линейных уравнений с n неизвестными*.

Решением системы называется упорядоченный набор из n чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , обращающий все уравнения системы в тождества при подстановке в них.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если у системы нет ни одного решения, она называется *несовместной*.

Система называется *однородной*, если все свободные члены уравнений системы $b_i, i = 1, \dots, m$, равны нулю: $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_m = 0$. Любая однородная система совместна, так как она имеет нулевое решение $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется

матрицей системы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$

Матрица \tilde{A} вида:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

называется *расширенной матрицей системы*.

Заметим, что матрицу \tilde{A} можно получить из A , добавив столбец свободных

членов. Матрица – столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ называется *матрицей свободных членов*.

Замечание 1. В матричной форме систему линейных уравнений можно записать

так: $A \cdot X = B$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица – столбец неизвестных.

45. Исследование системы линейных уравнений на совместность. Теорема Кронекера – Капелли

Ответ на вопрос о совместности системы линейных уравнений, а в случае совместности и о количестве решений системы, дает следующая теорема.

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы

$$\boxed{r(A) = r(\tilde{A}) = r}$$

При этом (в случае совместности), если ранг r равен количеству неизвестных n , то система имеет единственное решение.

Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, при нахождении этого множества $(n - r)$ неизвестных назначают свободными.

Из теоремы следует, что если $r(A) \neq r(\tilde{A})$, то система несовместна.

Для исследования системы линейных уравнений на наличие решений и их количество с помощью теоремы Кронекера – Капелли необходимо сделать следующее:

- ✓ выписать расширенную матрицу системы \tilde{A} ;
- ✓ с помощью элементарных преобразований строк привести ее к трапецевидной (в частности, верхнеугольной) форме;
- ✓ определить ранг расширенной матрицы $r(\tilde{A})$;
- ✓ «прикрыть» последний столбец, определить ранг матрицы системы $r(A)$;
- ✓ сравнить полученные ранги и сделать вывод.

Замечание 1. При решении любой системы линейных уравнений возможны три следующие ситуации:

- 1) система не имеет решений;
- 2) система имеет единственное решение;
- 3) система имеет бесконечное множество решений (двух – трех решений быть не может).

Замечание 2. Для однородной системы линейных уравнений возможны лишь две последние ситуации, причем вторая означает, что однородная система имеет только нулевое решение. Если решений бесконечное множество, то у однородной системы есть ненулевые решения.

46. Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Система уравнений называется *квадратной*, если количество уравнений в ней равно количеству неизвестных, т. е. если: $m = n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

При этом число n называется *порядком системы*.

Метод Крамера применяется только для решения квадратных систем с невырожденной матрицей, т. е. при $|A| \neq 0$. Такая система имеет единственное решение, которое находится по *формулам Крамера*:

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n}$$

где Δ – главный определитель системы, а Δ_i – вспомогательные определители. Вспомогательные определители строятся с помощью Δ следующим образом: из Δ «выбрасывают» столбец под номером i и заменяют его столбцом свободных членов.

В частности, для системы третьего порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

формулы Крамера будут такими:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

47. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса) решения систем линейных уравнений

Метод исключения неизвестных или метод Гаусса является универсальным методом решения систем линейных уравнений, поскольку ограничений для его применения нет. Его можно использовать и для решения квадратных систем с вырожденной матрицей, т. е. при $\Delta = |A| = 0$, и для решения систем, у которых число уравнений не равно числу неизвестных.

Суть метода Гаусса состоит в преобразовании заданной системы уравнений к равносильной системе, из которой нетрудно поочередно найти неизвестные. Расширенная матрица преобразованной системы имеет *трапецевидную или верхнетреугольную форму*.

Практическое решение системы методом Гаусса можно разделить на две части: прямой ход и обратный ход.

Прямой ход состоит в следующем:

- ✓ выписать расширенную матрицу заданной системы;
- ✓ с помощью элементарных преобразований строк привести ее к трапецевидной или к верхнетреугольной форме;
- ✓ определить ранг матриц системы $r(\tilde{A})$;
- ✓ по теореме Кронекера – Капелли сделать вывод о совместности системы, а в случае совместности и о количестве решений.

Заметим, что прямой ход метода Гаусса, по-существу, повторяет все действия, которые выполняются при исследовании системы.

Обратный ход метода Гаусса включает следующее:

- ✓ по преобразованной матрице, эквивалентной \tilde{A} , восстановить систему линейных уравнений. Она равносильна исходной системе, т. е. имеет те же решения;
- ✓ в случае единственности решения следует поочередно найти неизвестные, начиная с последнего уравнения;

если же система имеет бесконечное множество решений, то $(n - r)$ неизвестных (выбрав самостоятельно) следует положить свободными, обозначив их какими-то буквами. После этого необходимо все остальные неизвестные поочередно выразить через свободные, также начиная с последнего уравнения системы;

✓ записать ответ.

Предел функции, дифференциальное исчисление

1. Предел функции

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a , где a — число, $a \in R$, (или при $x \rightarrow a$), если для любого произвольно малого положительного числа ε существует зависящее от него положительное число δ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Используя логические символы, это определение предела функции в точке можно записать коротко следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid |f(x) - A| < \varepsilon \text{ для } x \in X: 0 < |x - a| < \delta \}.$$

Аналогично определяются понятия предела функции в точке и для случаев, когда A бесконечно ($A = \infty$, $A = +\infty$, $A = -\infty$) либо бесконечна предельная точка a ($x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$).

Для примера запишем два из таких случаев с помощью логических символов, M здесь сколь угодно большое положительное число:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M = M(\varepsilon) > 0 \mid |f(x) - A| < \varepsilon \text{ для } x \in X: |x| > M \};$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \{ \forall M > 0 \quad \exists \delta = \delta(M) > 0 \mid |f(x)| > M \text{ для } x \in X: 0 < |x - a| < \delta \}.$$

Замечание. Пределом постоянной величины c называется сама величина c .

2. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми

Бесконечно малой величиной при $x \rightarrow a$ называется величина, предел которой в точке a равен нулю.

Пример. Функция $y = x^2 - 9$ есть бесконечно малая величина при $x \rightarrow 3$, так как предел этой функции в точке $a=3$ равен нулю. При $x \rightarrow 2$ данная функция не является бесконечно малой, поскольку предел функции в точке $a=2$ равен -5 .

Замечание 1. Из постоянных величин единственное число ноль является бесконечно малой величиной, причем в любой точке a .

Бесконечно большой величиной при $x \rightarrow a$ называется переменная величина y , абсолютное значение которой неограниченно возрастает при $x \rightarrow a$ (предел y в точке a равен ∞).

Замечание 2. Ни одна из постоянных величин не является бесконечно большой ни в какой точке.

Пример. Функция $y = \frac{1}{x-5}$ есть бесконечно большая величина при $x \rightarrow 5$, так как ее предел в точке $a = 5$ равен ∞ . Эта же функция не является бесконечно большой, например, при $x \rightarrow 7$.

Теорема о связи бесконечно малых и бесконечно больших величин. Если величина y является бесконечно большой величиной при $x \rightarrow a$, то $\frac{1}{y}$ есть бесконечно малая величина при $x \rightarrow a$. Если величина y является бесконечно малой величиной при $x \rightarrow a$, то $\frac{1}{y}$ есть бесконечно большая величина при $x \rightarrow a$.

3. Основные теоремы о пределах

Будем предполагать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a , а c – постоянная величина. Тогда справедливы следующие свойства пределов.

Теорема 1. Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Теорема 2. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Теорема 3. Постоянный множитель выносится за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Теорема 4. Предел частного равен частному пределов, если предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми при любом количестве функций.

Замечание 2. При вычислении пределов различных функций часто используются следующие простейшие пределы, которые находятся с помощью элементарных рассуждений.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} Cx = \infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x} = 0,$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C}{x} = \infty$$

где $C \neq 0$ – постоянная.

4. Понятие неопределенности. Некоторые методы раскрытия неопределенностей при вычислении пределов рациональных и иррациональных функций

Вычисление пределов любых функций следует начинать с непосредственной подстановки вместо переменной x ее предельного значения a в функцию, стоящую под знаком предела. Если при этом получается конечное число или один из случаев, приведенных в замечании 2 параграфа 79 (простейшие пределы), то это и есть значение предела.

В противном случае, то есть при возникновении какой-либо другой ситуации (неопределенности), необходимо преобразовывать функцию, стоящую под знаком предела.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \rightarrow a$, вопрос о вычислении предела их отношения $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ решается неоднозначно. Этот предел может даже не существовать. Говорят, что отношение двух бесконечно малых функций представляет собой *неопределенность вида $\frac{0}{0}$* . А отношение двух бесконечно больших является *неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$* .

Кроме перечисленных встречаются и другие виды неопределенностей. Так, например, в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно большие функции, то при вычислении пределов $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)]$ может возникнуть *неопределенность вида $(\infty - \infty)$* .

Если $f(x)$ – бесконечно малая, а $g(x)$ – бесконечно большая функции, то вычисление предела их произведения $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ приводит к *неопределенности вида $0 \cdot \infty$* . При нахождении пределов $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}]$ возникают *неопределенности видов 1^∞ , 0^0 , ∞^0* .

Вычисление предела или установление того, что он не существует, при наличии неопределенности какого-то вида называют «*раскрытием неопределенности*». Существуют специальные приемы раскрытия неопределенностей.

Простейшие приемы раскрытия неопределенностей при вычислении пределов рациональных и иррациональных функций приведены в следующей таблице.

№ п/п	Вид неопределенности	Характер функции	Метод раскрытия неопределенности
1	$\frac{0}{0}$	Рациональная функция	Разложение на множители (числителя и знаменателя)
2	$\frac{0}{0}$	Иррациональная функция	Умножение на «сопряженное» (числителю либо знаменателю) выражение по формулам сокращенного умножения
3	$\frac{\infty}{\infty}$	Рациональная функция Иррациональная функция	Деление и числителя, и знаменателя на старшую степень переменной
4	$\infty - \infty$	Рациональная функция	Преобразование к виду дроби приведением к общему знаменателю
5	$\infty - \infty$	Иррациональная функция	Преобразование к виду дроби умножением и делением на «сопряженное» по формулам сокращенного умножения выражение

6	$0 \cdot \infty$	Рациональная функция Иррациональная функция	Сводится к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ преобразованием функции к виду дроби $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
7	0^0 1^∞ ∞^0	Рациональная функция Иррациональная функция	Логарифмированием приводится к одной из неопределенностей, указанных в пунктах 1 - 6

5. Эквивалентные бесконечно малые величины

Две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \rightarrow a$, если предел их отношения равен единице $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначают так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$.

Эквивалентные бесконечно малые величины обладает следующими свойствами.

Свойство 1. При нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую (или только одну) из них заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, то есть, если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow a$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Замечание. Заменять эквивалентной величиной слагаемое, выражение под знаком логарифма или выражение, стоящее в показателе степени, нельзя, это может привести к ошибке.

Свойство 2. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$, $f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow b$, то $\alpha[f(x)] \sim \beta[f(x)]$ при $x \rightarrow b$.

Свойство 3. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$, то $[\alpha(x)]^n \sim [\beta(x)]^n$ при $x \rightarrow a$, $n \neq 0$.

6. Замечательные пределы. Число e

Во многих случаях вычисление пределов осуществляется с помощью следующих двух замечательных пределов:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Число e есть иррациональное число, значение которого с точностью до шестой значащей цифры: $e = 2,71828$.

Часто используются также следующие пределы, являющиеся следствием второго замечательного предела (формулы 2):

$$2.1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$2.2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$2.3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$2.5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

При $x \rightarrow 0$ имеют место следующие соотношения эквивалентности:

$$\sin x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad \arcsin x \sim x; \quad \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$(a^x - 1) \sim x \cdot \ln a, \quad (a > 0, a \neq 1); \quad (e^x - 1) \sim x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot x}{\arcsin 2x \cdot \sin^2 5x}$.

Решение. Функция, стоящая под знаком предела, представляет собой отношение двух бесконечно малых, т. е. имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Вначале

применим тригонометрическую формулу: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

Получим предел следующего вида:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot x}{\arcsin 2x \cdot \sin^2 5x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot x}{\arcsin 2x \cdot \sin^2 5x}.$$

Воспользуемся следующими эквивалентностями при $x \rightarrow 0$:

$$\sin^2 \frac{x}{2} \sim \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{4}; \quad \arcsin 2x \sim 2x; \quad \sin^2 5x \sim (5x)^2 = 25x^2.$$

Получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot x}{\arcsin 2x \cdot \sin^2 5x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot x}{2x \cdot 25x^2} = \frac{1}{100} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = \frac{1}{100}.$$

7. Понятие производной

Два вопроса: 1) о нахождении касательной к произвольной линии, и 2) о нахождении скорости при произвольном движении, послужили источником дифференциального исчисления. Эти вопросы привели к решению задачи о нахождении для заданной функции $f(t)$ другой функции $f'(t)$, названной затем *производной* и представляющей собой *скорость изменения функции $f(t)$ относительно аргумента t* .

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X , $x \in X$ — какая-либо точка из этого множества. Зададим переменной x приращение Δx . Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение Δy , равное

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Производной функции $f(x)$ в точке $x \in X$ называется предел отношения бесконечно малого приращения функции Δy к бесконечно малому приращению переменной Δx при условии, что Δx стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Заметим, что этот предел сам является функцией аргумента x . Таким образом, производная $f'(x)$ – это некоторая другая функция от x . Обозначается $f'(x)$ или y' .

Пример. Найти производную функции $y = \cos x$.

Решение. $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$, тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(- \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \right) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = - \sin x.$$

Получили: $y' = (\cos x)' = -\sin x$.

Сама операция нахождения производных называется *дифференцированием*.

8. Правила нахождения производной

Если C – постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные, то справедливы следующие правила нахождения производных.

Правило 1. Производная постоянной величины равна нулю:

$$C' = 0.$$

Правило 2. Постоянный множитель выносится за знак производной:

$$(Cu)' = C \cdot u'.$$

Правило 3. Производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме их производных

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Правило 4. Производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Правило 5. Производная частного двух функций равна дроби, у которой знаменатель равен квадрату делителя, а числитель равен разности между произведением делителя на производную делимого и произведением делимого на производную делителя

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Если переменная функции, в свою очередь, является некоторой функцией, то говорят, что определена *сложная функция*:

$$y = f[u(x)].$$

При этом функцию $f(u)$ называют *внешней функцией*, функцию $u = u(x)$ при этом называют *промежуточным аргументом*, *промежуточной переменной* или *внутренней функцией*, x – *независимой переменной*.

Так, например, функция $y = \sin x$ является простой функцией, а функция $y = \sin(x^3 + 2)$ – сложной. Промежуточная переменная в этом случае: $u = x^3 + 2$, внешней является функция $f(u) = \sin u$.

Правило 6. Производная сложной функции равна производной внешней функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимой переменной:

$$(f[u(x)])' = f'_u(u(x)) \cdot u'_x(x).$$

9. Производные основных элементарных функций (таблица производных).

При нахождении производных различных функций используются правила нахождения производных и формулы производных основных элементарных функций (таблица производных).

Таблица производных

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1},$ (n – постоянная)	10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(e^x)' = e^x$	12. $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	14. $(shx)' = chx$
6. $(\sin x)' = \cos x$	15. $(chx)' = shx$
7. $(\cos x)' = -\sin x$	16. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	17. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	

Пример. Найти производную функции $y = 5 + 3x^2 \cdot \arcsin x + \frac{ctgx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Вначале воспользуемся правилом дифференцирования суммы функций, затем сразу же найдем производную первого слагаемого, учитывая, что $C' = 0$ (следует из первой табличной формулы при $n=0$ или из первого правила нахождения производной). Во втором слагаемом вынесем постоянный множитель $C=3$ за знак производной и применим правило производной произведения двух функций. В третьем слагаемом используем правило дифференцирования частного двух функций. После этого применим табличные формулы (первую, десятую и девятую):

$$\begin{aligned} y' &= \left(5 + 3x^2 \cdot \arcsin x + \frac{ctgx}{\sqrt{x}} \right)' = (5)' + (3x^2 \arcsin x)' + \left(\frac{ctgx}{\sqrt{x}} \right)' = \\ &= 0 + 3 \cdot \left[(x^2)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)' \right] + \frac{(ctgx)' \cdot \sqrt{x} - ctgx \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \end{aligned}$$

$$= 3 \left(2x \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{-\frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctgx}}{2\sqrt{x}}}{x} = 3x \cdot \left(2 \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \frac{2x + \sin^2 x \cdot \operatorname{ctgx}}{2x\sqrt{x} \cdot \sin^2 x}.$$

Ответ: $y' = 3x \cdot \left(2 \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \frac{2x + \sin^2 x \cdot \operatorname{ctgx}}{2x\sqrt{x} \cdot \sin^2 x}.$

Пример. Найти производную функции $y = (\arcsin \sqrt{x})^3$.

Решение. Функция $y = (\arcsin \sqrt{x})^3$ является сложной степенной функцией $y = u^3$, где промежуточная переменная $u = \arcsin \sqrt{x}$, в свою очередь, также есть сложная функция $u = \arcsin t$. Её промежуточная переменная: $t = \sqrt{x}$. Поэтому вначале применим первую табличную производную при $n = 3$, учитывая правило нахождения производной сложной функции. А для нахождения u' затем воспользуемся десятой табличной формулой (учитывая также правило нахождения производной сложной функции). Внутренней функцией в этом случае служит функция $t = \sqrt{x}$.

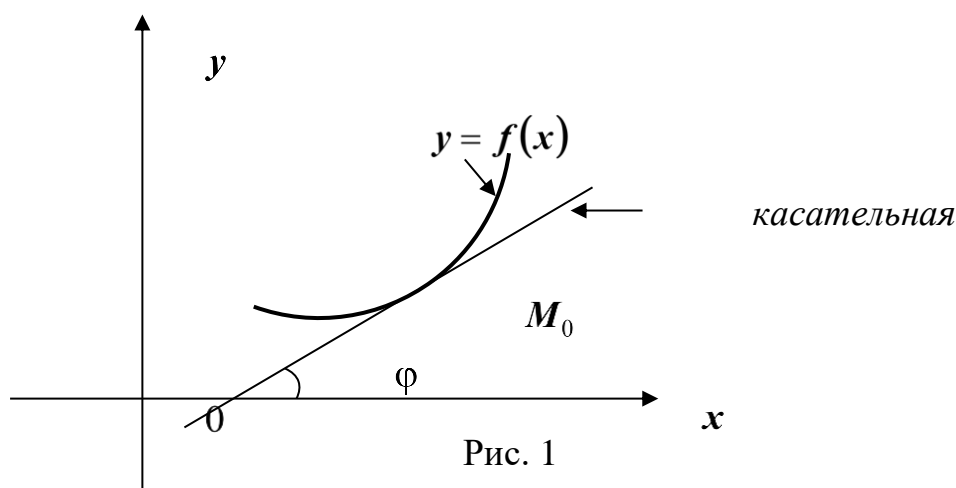
$$\begin{aligned} y' &= \left[(\arcsin \sqrt{x})^3 \right]' = 3 \cdot (\arcsin \sqrt{x})^2 \cdot (\arcsin \sqrt{x})' = 3 \cdot (\arcsin \sqrt{x})^2 \cdot \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \\ &= 3 \cdot (\arcsin \sqrt{x})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3 \cdot (\arcsin \sqrt{x})^2}{2 \cdot \sqrt{x}(1-x)}. \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{3 \cdot (\arcsin \sqrt{x})^2}{2 \cdot \sqrt{x}(1-x)}.$

10. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к кривой

С геометрической точки зрения функция $y = f(x)$ определяет на плоскости некоторую кривую. Угловым коэффициентом касательной к этой кривой с точкой касания $M_0(x_0, f(x_0))$ (или, что одно и то же, тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox) равен производной функции $y = f(x)$, вычисленной в точке касания (рис. 1).

В этом и заключается геометрический смысл производной: $k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$.



Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ с точкой касания $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Уравнение нормали (прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно касательной) будет таким:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Пример. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2(x-1)^2$ с точкой касания $M_0(2;4)$.

Решение. Найдём производную заданной функции

$$\begin{aligned} y' &= [x^2(x-1)^2]' \Rightarrow y' = (x^2)' \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot [(x-1)^2]' \\ y' &= 2x(x-1)^2 + x^2 \cdot 2(x-1) \cdot (x-1)', \quad y' = 2x(x-1)^2 + 2x^2 \cdot (x-1) \\ y'(x) &= 2x \cdot (x-1) \cdot (x-1+x), \quad y'(x) = 2x(x-1)(2x-1). \end{aligned}$$

Вычислим производную в точке касания, то есть при $x_0 = 2$

$$y'(x_0) = y'(2) = 2 \cdot 2(2-1) \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 12.$$

Воспользуемся теперь уравнением касательной при $x_0 = 2$, $f(x_0) = 4$, $f'(x_0) = y'(x_0) = 12$:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 12 \cdot (x - 2) \\ y - 4 &= 12x - 24, \quad y = 12x - 24 + 4, \quad y = 12x - 20. \end{aligned}$$

Ответ: $y = 12x - 20$.

11. Физический смысл производной

Если прямолинейное движение материальной точки определяется законом $S = S(t)$, где t – время, S – путь, пройденный за время t , то производная $S'(t)$ выражает *скорость* этого движения:

$$V(t) = S'(t).$$

12. Производные высших порядков. Физический смысл производной второго порядка

Производную y' функции $y = f(x)$ называют *производной первого порядка* или *первой производной* заданной функции. Производная первого порядка, в свою очередь, также является некоторой функцией. Ее также можно дифференцировать. Производную от производной первого порядка называют *производной второго порядка* или *второй производной* исходной функции $y = f(x)$. Обозначают y'' , $f''(x)$ или $\frac{d^2 y}{dx^2}$: $y'' = (y')'$.

Аналогично определяются производные и более высоких порядков:

$$y''' = (y'')', \quad y^{(n)} = (y^{(n-1)})', \quad \dots, \quad y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

Замечание (физический смысл производной второго порядка). Если прямолинейное движение материальной точки определяется законом $S = S(t)$, где t – время, S – путь, пройденный за время t , то первая производная $S'(t)$ выражает скорость этого движения. Вторая производная $S''(t)$ характеризует *ускорение* этого движения $a(t) = S''(t) = V'(t)$

13. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя (первый случай: раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$). Пусть

функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a , где a – конечное число или ∞ . Пусть при $x \rightarrow a$ обе функции стремятся к нулю: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Тогда, если существует конечный

или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует также и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедливо

равенство:
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя (второй случай: раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a , где a – конечное число или ∞ . Пусть при $x \rightarrow a$ обе функции стремятся к бесконечности: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Тогда,

если существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует также и

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедливо равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.

Решение. Имеет место неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Можно применить правило

Лопиталя:
$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(\ln \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1.$$

Замечание 1. В случае необходимости правило Лопиталя можно применять повторно:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left(\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

14. Возрастание и убывание функции. Достаточное условие монотонности

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке (a, b) , если $f(x_2) > f(x_1)$ для всех $a < x_1 < x_2 < b$ (или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$ для всех $a < x_1 < x_2 < b$).

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Необходимое условие монотонности. Если дифференцируемая на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то на этом промежутке

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Достаточный признак монотонности. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на промежутке (a, b) имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a, b]$.

15. Экстремумы функции одной переменной

Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $y = f(x)$, если для всех x из некоторой проколотой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Локальные максимумы и минимумы называют *локальными экстремумами*.

Слово «локальный» означает «местный». И действительно, может оказаться, что значение функции в точке своего какого-то локального максимума меньше, чем значение этой же функции в точке своего какого-то локального минимума.

Замечание 1. При исследовании функций на экстремум точками экстремума удобно называть не сами точки $M_0(x_0, f(x_0))$, расположенные на графике, а лишь их абсциссы x_0 . Поэтому в дальнейшем изложении будем придерживаться такого подхода.

Необходимое условие экстремума. В точке локального экстремума производная $f'(x)$ равна нулю, если она существует и конечна.

Точки, в которых $f'(x)$ равна нулю, бесконечности или не существует, называются *критическими точками* (точками возможного экстремума).

Замечание 2. Функция может иметь экстремум только в критической точке, но не в любой критической точке функция имеет экстремум. Решить вопрос о том, будет данная критическая точка точкой экстремума или нет, можно с помощью достаточных условий.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть $f(x)$ в некоторой окрестности критической точки x_0 имеет производную, за исключением, быть может, самой точки x_0 . Если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный экстремум.

Именно: если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (max), если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то в точке x_0 – локальный минимум (min).

Если при переходе через критическую точку производная знак не меняет, то в этой точке экстремума нет.

Второе достаточное условие локального экстремума. Пусть функция $f(x)$ в окрестности критической точки x_0 , в которой $f'(x) = 0$, имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда если $f''(x_0) < 0$, то x_0 есть точка локального максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума.

Третье достаточное условие локального экстремума. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ и в точке x_0 непрерывную производную n -го порядка $f^{(n)}(x_0)$. Причем

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

- 1) если n —четное число, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$;
- 2) если n —нечетное число, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

Схема исследования функции на экстремум

1. Найти область определения функции.
2. Найти критические точки, которые лежат внутри области определения функции.
3. Каждую критическую точку исследовать с помощью одного из достаточных условий локального экстремума.
4. Результаты исследования оформить в таблицу или на числовой прямой.

Пример. Найти точки локальных экстремумов функции $y = \sqrt[3]{1-x^2}$.

Решение.

1. Заданная функция определена на всей числовой прямой: $x \in \mathbb{R}$.

2. Находим $y' = \frac{1}{3}(1-x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$.

Решая уравнение $y' = 0$ или $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = 0$, получаем $x_1 = 0$. Кроме того, при

$1-x^2 = 0$ или при $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ y' не существует. Функция y определена на всей числовой прямой, следовательно, все найденные точки являются критическими.

3. Исследуем поочередно критические точки с помощью первого достаточного условия локального экстремума. Для этого определим знаки y' слева и справа от каждой критической точки. Если $-\infty < x < -1$, то $y' > 0$, если $-1 < x < 0$, то $y' > 0$; при $0 < x < 1$ $y' < 0$, при $1 < x < +\infty$ $y' < 0$.

4. Результаты исследования оформим в виде таблицы.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0		1	$(1, +\infty)$
	+	\nexists	+	\nexists		\nexists	-
	\nearrow	нет экстр.	\nearrow	макс.		нет экстр.	\searrow

Заметим, что результаты исследования удобно оформлять и на числовой прямой.

Ответ: Функция возрастает на промежутках $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$; убывает на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$; имеет один экстремум $y_{\max} = y(0) = 1$.

16. Функции нескольких переменных

Если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принадлежащей некоторому множеству Ω (т. е. каждому упорядоченному набору из n действительных чисел), по какому-то закону f ставится в соответствие единственное значение $u \in \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве Ω определена (однозначная) *функция n переменных* x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначают так:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ или } u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad u = f(M) \text{ или } u = u(M).$$

Множество $\Omega \subset R^n$ при этом называют *областью определения* функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Чаще всего используются функции двух и трёх переменных, которые обозначаются, соответственно, $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$ и $u = f(x, y, z)$ или $u = u(x, y, z)$. Областью определения функции двух переменных служит некоторое множество плоскости, функции трех переменных – некоторое множество трехмерного пространства. График функции двух переменных представляет собой поверхность.

17. Частные производные

Частной производной функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по одной из её независимых переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) называется следующая производная

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{u(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Приращение $\Delta_{x_i} u = u(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - u(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ при этом называется *частным приращением заданной функции по переменной x_i* . Частные производные обозначают так: $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ или u'_{x_i} . Функция n переменных имеет n частных производных первого порядка.

Функция двух переменных $z = z(x, y)$, в частности, имеет две частные производные первого порядка: по переменной x и по переменной y . Они определяются равенствами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y}.$$

При нахождении частных производных функций нескольких переменных пользуются известными правилами и формулами дифференцирования функций одной переменной и следующим правилом.

При дифференцировании функции нескольких переменных по одной из них все остальные переменные следует считать постоянными.

Пример. Найти все частные производные первого порядка функции $z = x^5 y^3 + e^x$.

Решение. Задана функция двух переменных. Считая y постоянной величиной (поэтому вынося её за знак производной в первом слагаемом), находим частную производную по переменной x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^5 y^3 + e^x)'_x = (x^5 y^3)'_x + (e^x)'_x = y^3 \cdot 5x^4 + e^x = 5x^4 y^3 + e^x.$$

При нахождении частной производной по y переменную x считают постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^5 y^3 + e^x)'_y = (x^5 y^3)'_y + (e^x)'_y = x^5 \cdot 3y^2 + 0 = 3x^5 y^2.$$

Производная второго слагаемого по переменной y равна нулю как производная постоянной величины.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 y^3 + e^x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^5 y^2$.

Частные производные первого порядка функции нескольких переменных обычно зависят от тех же переменных, что и сама функция. Поэтому их также можно

дифференцировать по каждой из переменных. Частные производные от частных производных первого порядка называются *частными производными второго порядка* заданной функции.

ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Линейная алгебра, аналитическая геометрия, векторная алгебра

1. Определители. Свойства определителей. Вычисление определителя путем разложения по строке или столбцу.
2. Матрицы. Линейные операции над матрицами: сложение, вычитание, умножение на число. Условия их выполнения. Произведение матриц. Свойства операций над матрицами.
3. Ранг матрицы: определение и алгоритм нахождения. Элементарные преобразования матрицы.
4. Системы линейных уравнений. Понятие решения системы. Совместные и несовместные системы. Равносильные системы.
5. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений. Матричная запись системы.
6. Исследование систем на совместность. Теорема Кронекера-Капелли.
7. Метод Крамера решения систем линейных уравнений: формулы и условие применения метода.
8. Суть метода Гаусса. Прямой и обратный ход. Понятия общего и частного решений системы.
9. Векторы. Коллинеарность и компланарность векторов. Линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение на число.
10. Скалярное произведение двух векторов, его свойства, вычисление в координатной форме. Геометрические приложения скалярного произведения: вычисление угла между векторами, условие перпендикулярности векторов, длина вектора.
11. Векторное произведение двух векторов: понятие и свойства. Нахождение векторного произведения через координаты сомножителей. Вычисление площадей параллелограмма и треугольника через векторное произведение.
12. Смешанное произведение трех векторов. Понятие, свойства, вычисление, приложения к нахождению объемов.
13. Прямая на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
14. Прямая линия в пространстве. Канонические уравнения прямой линии в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.
15. Плоскость. Общее уравнение плоскости, вектор нормали. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Определение угла между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
16. Вычисление углов между прямой и плоскостью, между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых, прямой и плоскости.

Теория пределов. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных

17. Окрестность и проколота окрестность точки. Понятие предела функции в точке, его геометрический смысл.
18. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, связь между ними. Свойства бесконечно малых функций.
19. Арифметические свойства пределов: предел суммы, произведения и частного функций.
20. Различные типы неопределенностей при вычислении пределов рациональных функций, методы их раскрытия.
21. Эквивалентность функций. Теорема о замене эквивалентных величин под знаком предела.
22. Первый замечательный предел. Таблица основных эквивалентностей, связанных с первым замечательным пределом.
23. Второй замечательный предел, эквивалентности, вытекающие из второго замечательного предела.
24. Понятие производной функции одной переменной, ее геометрический и физический смысл. Таблица производных.
25. Теорема о производной суммы, произведения, частного функций.
26. Понятие и пример сложной функции. Теорема о производной сложной функции. Таблица производных для сложных функций.
27. Производные высших порядков. Понятия и методы нахождения производных высших порядков.
28. Правило Лопиталя вычисления пределов.
29. Возрастание (убывание) функции на интервале. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале.
30. Понятие локального экстремума функции одной переменной. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума по первой производной.
31. Понятие функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных, правило их отыскания.

СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Туганбаев А. А. Основы высшей математики: Учебное пособие. – Спб.: «Лань», 2021. – 496 с.
2. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М: «Мир и образование», 2016.
3. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М: «Мир и образование», 2016.

ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКИ

1. www.allmath.ru

2. www.math.ru
3. pstu.ru/sources/math/